

Polinômios – Parte I

Definição, Grau, Identidade, Raiz e Operações Básicas

Prof. Cleibson José da Silva

Instituto Federal de Pernambuco – Campus Caruaru



Definição de Polinômio

Definição Formal

Um **polinômio** é uma função na variável x da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Em que:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são os **coeficientes** reais ou complexos.
- Os expoentes são números naturais ($n \in \mathbb{N}$).

Definição de Polinômio

Definição Formal

Um **polinômio** é uma função na variável x da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Em que:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são os **coeficientes** reais ou complexos.
- Os expoentes são números naturais ($n \in \mathbb{N}$).

Polinômio Nulo

Um polinômio é dito **nulo** se todos os seus coeficientes são iguais a zero:

$$P(x) \equiv 0 \iff a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

Exemplos de Polinômios

Exemplos da Apostila

❶ $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$

Exemplos de Polinômios

Exemplos da Apostila

① $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$

② $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1$

Exemplos de Polinômios

Exemplos da Apostila

- ❶ $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$
- ❷ $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1$
- ❸ $P(x) = 5$ (Polinômio constante)

Definição do Grau

Considere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ (indica-se por $\text{gr}(P)$ ou ∂P) é igual a n se $a_n \neq 0$.

Grau do Polinômio

Definição do Grau

Considere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ (indica-se por $\text{gr}(P)$ ou ∂P) é igual a n se $a_n \neq 0$.

Exemplos da Apostila

- O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.

Grau do Polinômio

Definição do Grau

Considere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ (indica-se por $\text{gr}(P)$ ou ∂P) é igual a n se $a_n \neq 0$.

Exemplos da Apostila

- O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.
- O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.

Grau do Polinômio

Definição do Grau

Considere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ (indica-se por $\text{gr}(P)$ ou ∂P) é igual a n se $a_n \neq 0$.

Exemplos da Apostila

- O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.
- O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.
- O grau de $P(x) = 13$ é igual a 0.

Grau do Polinômio

Definição do Grau

Considere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ (indica-se por $\text{gr}(P)$ ou ∂P) é igual a n se $a_n \neq 0$.

Exemplos da Apostila

- O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.
- O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.
- O grau de $P(x) = 13$ é igual a 0.

Grau do Polinômio

Definição do Grau

Considere $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dizemos que o grau de $P(x)$ (indica-se por $\text{gr}(P)$ ou ∂P) é igual a n se $a_n \neq 0$.

Exemplos da Apostila

- O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.
- O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.
- O grau de $P(x) = 13$ é igual a 0.

Observação Importante

Não se define o grau de um polinômio nulo.

Definição

Os polinômios

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

são **idênticos** ($P(x) \equiv Q(x)$) se, e somente se, os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais.

Definição

Os polinômios

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

são **idênticos** ($P(x) \equiv Q(x)$) se, e somente se, os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais.

Condição de Igualdade

$$a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1}, \quad \dots, \quad a_1 = b_1 \quad \text{e} \quad a_0 = b_0$$

Exemplo: Polinômios Idênticos

Exemplo da Apostila

Determinar os valores de a , b e c para os quais os polinômios

$$P(x) = ax^2 + 3x + 9 \quad \text{e} \quad B(x) = (b + 3)x^2 + (c - 1)x + 3b$$

são idênticos.

Definição Formal

Dizemos que um número k é **raiz** de um polinômio $P(x)$ se, e somente se:

$$P(k) = 0$$

Raiz ou Zero de um Polinômio

Definição Formal

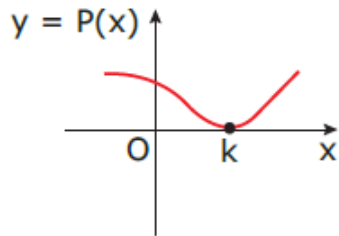
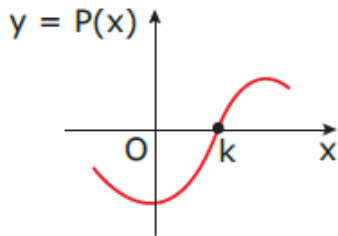
Dizemos que um número k é **raiz** de um polinômio $P(x)$ se, e somente se:

$$P(k) = 0$$

Interpretação Geométrica

Do ponto de vista geométrico, a raiz representa a abscissa do ponto no qual a curva correspondente ao gráfico de $y = P(x)$ intercepta o **eixo das abscissas** (*eixo x*) no plano cartesiano.

Interpretação Geométrica da Raiz



Operações com Polinômios: Adição e Subtração

Regra Prática

Nessas operações, basta adicionarmos ou subtrairmos os coeficientes dos **termos semelhantes**.

Operações com Polinômios: Adição e Subtração

Regra Prática

Nessas operações, basta adicionarmos ou subtrairmos os coeficientes dos **termos semelhantes**.

Exemplo da Apostila

Considerar os polinômios:

$$A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 9x + 12 \quad \text{e} \quad B(x) = x^4 + 23x^3 - 7x^2 + x + 3$$

Calcule em sala:

- 1 $A(x) + B(x)$
- 2 $A(x) - B(x)$

Operações com Polinômios: Multiplicação

Regra Prática

Multiplica-se cada termo de $A(x)$ por todos os termos de $B(x)$, reduzindo em seguida os termos semelhantes.

Operações com Polinômios: Multiplicação

Regra Prática

Multiplica-se cada termo de $A(x)$ por todos os termos de $B(x)$, reduzindo em seguida os termos semelhantes.

Propriedade dos Graus

$$\text{grau}(A \cdot B) = \text{grau}(A) + \text{grau}(B)$$

Operações com Polinômios: Multiplicação

Regra Prática

Multiplica-se cada termo de $A(x)$ por todos os termos de $B(x)$, reduzindo em seguida os termos semelhantes.

Propriedade dos Graus

$$\text{grau}(A \cdot B) = \text{grau}(A) + \text{grau}(B)$$

Exemplo da Apostila

Sejam $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$. Determine $A(x) \cdot B(x)$.

Teorema da Divisão (Algoritmo de Euclides)

Da divisão de dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ não nulos, obtêm-se os polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto), tais que:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Divisão de Polinômios: Conceito

Teorema da Divisão (Algoritmo de Euclides)

Da divisão de dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ não nulos, obtêm-se os polinômios $Q(x)$ (quociente) e $R(x)$ (resto), tais que:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Condição para o Resto

$$\text{grau}(R) < \text{grau}(B) \quad \text{ou} \quad R(x) = 0 \quad (\text{divisão exata})$$

Exemplo Prático

Efetuar a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ pelo polinômio $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Exercício Resolvido 01

Exercício Resolvido 01 (UFMG)

O valor de a para que $1 + \sqrt{2}$ seja raiz do polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ é:

A -3

B -1

C 1

D 3

Exercício Resolvido 02

Exercício Resolvido 02 (UFES)

O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 7$, com coeficientes reais, é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor da soma $a + b$ é igual a:

☐ A 7

☐ C 15

☐ E 21

☐ B 14

☐ D 16